조사분석

퍼지이론의 기초 : 퍼지 집합

전인홍* 이광로** 김명원***

목 차

* 서울여자대학교 수학과 교수
** 인공지능연구실 연구원
*** 기초기술연구부 책임연구원

Ⅰ. 서 론

최근에 각광을 받고 있는 퍼지 이론에 대해서 퍼지 집합(fuzzy set), 퍼지 관계(fuzzy relation), 퍼지 함수(fuzzy function), 퍼지 논리 및 추론(fuzzy logic and inference), 퍼지 이론의 응용 (Ⅰ), (Ⅱ)의 순서로 소개한다. 이번은 첫편으로 퍼지 집합에 관해서 소개한다. Ⅱ장은 퍼지 집합, Ⅲ장은 퍼지 집합의 연산, Ⅳ장은 퍼지 집합 연산의 기본적 성질, Ⅴ장은 퍼지 집합에 대한 기타의 연산, Ⅵ장은 퍼지 집합의 레벨(level) 집합에 대해서 알기 쉽게 설명한다.

Ⅱ. Fuzzy 집합

일반적인 수학의 의미에 있어서 집합이란 어떤것이 집합에 속하는가 또는 속하지 않는가를 판정해 명확히 속하는 것들만을 모아서 집합으로 하지만 fuzzy 집합에서는 그것에 속하는가 또는 속하지 않는가가 명확히 정해져 있지 않

은 것을 대상으로 한다.

Fuzzy 집합은 특별한 경우로서 보통의 집합이 되지만 특히 양자를 구별할 필요가 있을 경우 fuzzy 집합에 대해서 일반의 크리스프 집합(crisp set)이라 한다.

Fuzzy 집합 : 어떤 crisp 집합 X의 fuzzy 집합 A는 다음과 같은 membership function m_A에 의해 특징 지워진다. 즉

$$m_A : X \longrightarrow [0, 1] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.1)$$

element $x \in X$에 대한 $m_A(x) \in [0, 1]$는 x가 fuzzy 집합 A에 속하는 degree로서 membership grade라 부른다.

[참고] : $m_A : X \rightarrow [0, 1]$에서 구간 [0, 1]을 {0, 1}로 치환할 경우 fuzzy 집합 A는 보통 집합(crisp set)이 되고 membership function m_A는 characteristic function이 된다. 즉

$$m_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin A \\ 1 & \text{if } x \in A \end{cases}$$

fuzzy 집합 A를 표시 하는데 있어서 요소 x와 그 grade $m_A(x)$의 집합으로 표현하는 것이 있다. 즉

$$A = \{(x, m_A(x))\}, x \in X \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.2)$$

또 fuzzy 집합의 표현법으로 다음과 같은 표기법을 사용한다.

(i) X가 유한 집합의 경우, 즉 $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$의 경우,

$$A = m_A(x_1)/x_1 + m_A(x_2)/x_2 + \cdots + m_A(x_n)/x_n, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.3)$$

간단히 $A = \sum_{i=1}^{n} m_A(x_i)/x_i \quad \cdots\cdots\cdots (1.4)$

로 표기할 수 있다. 여기서 x_1의 membership grade가 $m_A(x_1)$이고, x_2의 membership grade가 $m_A(x_2)$이고, ……, x_n의 membership grade는 $m_A(x_n)$이다. 또 +는 덧셈을 나타내는 것이 아니라 "또는"(or)을 나타낸다. 보통의 집합을 표현하는 방식으로는 아래와 같이 된다.

$$A = \{m_A(x_1)/x_1, m_A(x_2)/x_2, \cdots, m_A(x_n)/x_n\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.5)$$

(ii) X가 연속 집합의 경우

$$A = \int_X m_A(x)/x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.6)$$

로 표시한다.

이 경우 적분기호 $\int$는 적분을 나타내는 것이 아니라 (i)의 Σ을 확장한 것으로 생각할 수 있다.

[참고] : 보통의 집합(crisp set) $Y = \{y_1, \cdots\cdots y_n\}$는 다음과 같이 표시한다.

$$Y = 1/y_1 + 1/y_2 = \cdots\cdots + 1/y_n$$

또는 간단히

$$Y = y_1 + y_2 + \cdots\cdots + y_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.7)$$

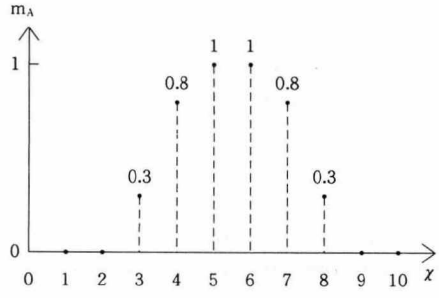
로 표시한다.

(예 1) X를 1, 2, ……, 10의 집합이라 하자. 즉 $X = 1 + 2 + \cdots\cdots + 10$이고 fuzzy 집합 A는

$m_A(1) = m_A(2) = 0$; $m_A(3) = 0.3$; $m_A(4) = 0.8$; $m_A(5) = m_A(6) = 1$; $m_A(7) = 0.8$; $m_A(8) = 0.3$; $m_A(9) = m_A(10) = 0$;

의 membership 함수로 표현된다고 하자. 이것을 그림으로 표시하면 〈그림 1.1〉과 같다. 식 (1.3), (1.5)의 표기법을 사용하면

$A = 0.3/3 + 0.8/4 + 1/5 + 1/6 + 0.8/7 + 0.3/8$로 표시되거나 또는 $A = \{0.3/3, 0.8/4, 1/5, 1/6, 0.8/7, 0.3/8\}$으로 표시된다.



〈그림 1.1〉 Fuzzy 집합 A

(예 2) X를 자연수의 집합이라 하자. A를 "작은 자연수"로 표현되는 fuzzy 집합이라 하자. A의 membership function은

$$m_A(i) = \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{10}\right)^2}, \quad i \in \{0, 1, 2, \cdots\cdots\} \quad \cdots\cdots\cdots (1.8)$$

식 (1.4)의 표기법으로는

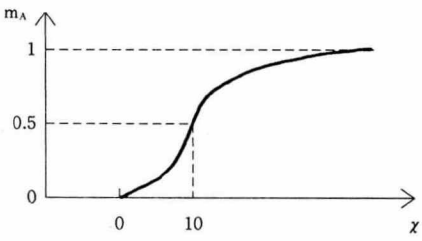
$$A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{10}\right)^2} / i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.9)$$

이다.

(예 3) X를 $(-\infty, \infty)$의 실수 전체라 하고, A를 "0보다 매우 큰 실수"의 fuzzy 집합이라 하자. A의 membership function은

$$m_A(x) = \begin{cases} 0 & \chi \le 0 \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{100}{x^2}} & \chi > 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.10)$$

를 그림으로 나타내면 〈그림 1.2〉와 같다.



〈그림 1.2〉 A = {x : x >> 0}의 설명

이것을 식 (1.6)의 적분 표시법을 사용하면 다음과 같다.

$$A = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{100}{x^2}} / \chi \quad \cdots\cdots\cdots (1.11)$$

Ⅲ. Fuzzy 집합의 연산

1. Fuzzy 집합의 equality

X의 두개의 fuzzy 집합 A, B가 같다는 (equal) 것은 A=B라 쓰고, 다음과 같이 정의된다.

$$A = B \text{ if and only if } m_A(x) = m_B(x), \quad {}^{\forall}x \in X \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.12)$$

2. Fuzzy 집합의 포함 관계

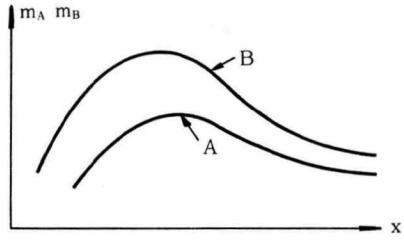
집합 A, B에 있어서 A가 B에 포함된다는 것은, 즉 A가 B의 부분 집합(subset)이라는 것은 A⊆B라 쓰고, 다음과 같이 정의 된다.

$$A \subseteq B \quad \text{if and only if } m_A(x) \le m_B(x), \quad {}^{\forall}x \in X \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.13)$$

(예 1) $X = x_1 + x_2 + \cdots\cdots x_6$이고, fuzzy 집합 A, B가 각각 다음과 같다고 하면 명확히 A⊆B이다.

$$A = 0.4/x_1 + 0.2/x_2 + 0.8/x_3 + 0.7/x_4 + 0.3/x_5 + 0.2/x_6$$

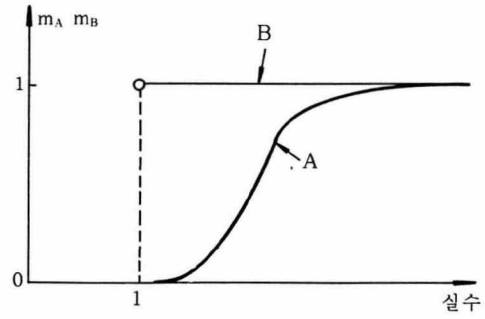
$$B = 0.7/x_1 + 0.3/x_2 + 0.9/x_3 + 0.7/x_4 + 0.6/x_5 + 1/x_6$$



〈그림 1.3〉 A⊆B

(예 2) "아주 키 큰 사람"의 fuzzy 집합은 "키 큰 사람"의 fuzzy 집합에 포함된다.

(예 3) "1보다 매우 큰 실수"의 fuzzy 집합은 "1보다 큰 실수"의 fuzzy 집합에 포함된다. 이는 〈그림 1.4〉와 같다.



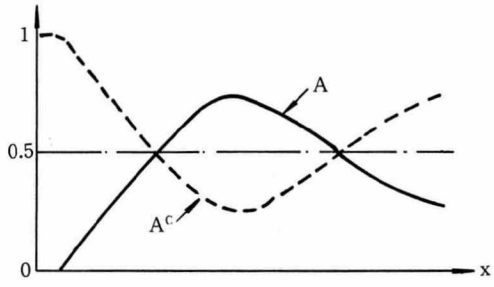
〈그림 1.4〉 A={χ : χ>>1과 B={χ:χ>1}의 포함 관계 A ⊆ B

3. Fuzzy 집합의 여집합

Fuzzy 집합 A의 여집합(complement)은 A^C라 쓰고 다음 식과 같이 정의된다.

$$A^C \longleftrightarrow m_{A^c}(x)=1-m_A(x),\ {}^{\forall}x \in X \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.14)$$

이 관계를 그림으로 그려보면 〈그림 1.5〉와 같다.

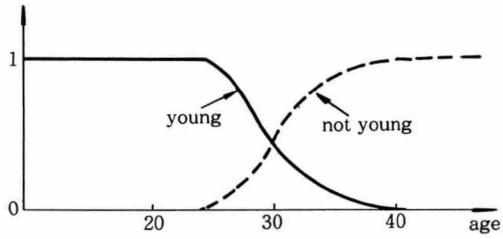


〈그림 1.5〉 여집합 A^C의 설명

(예 4) X = 1+2+ ····· +10라 하고 fuzzy 집합을 A = 0.8/3+1/5+0.6/6이라 하자. 여집합 A^C는 다음과 같다.

$$A^C = 1/1 + 1/2 + 0.2/3 + 1/4 + 0/5 + 0.4/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10$$

(예 5) X = [1, 100]가 연령을 표시하고, "young"을 젊은 사람들의 연령이라 하면 "young"의 여집합 "not young"은 young의 membership의 함수로부터 <그림 1.6〉과 같이 얻어진다.



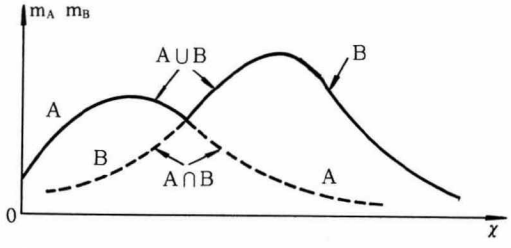
〈그림 1.6〉 Fuzzy 집합 "young"과 여집합 "not young"

4. Fuzzy 집합의 합집합

Fuzzy 집합 A, B의 합집합(union)은 A∪B라 쓰고 다음과 같이 정의된다.

$$A \cup B \leftrightarrow m_{A\cup B}(x)=\max\{m_A(x), m_B(x)\}= m_A(x) \vee m_B(x),\ {}^{\forall}x \in X \quad \cdots\cdots\cdots (1.15)$$

Fuzzy 집합 A, B의 합집합 A, B의 관계를 그림으로 표시하면 〈그림 1.7〉과 같다.



〈그림 1.7〉 Fuzzy 집합의 합집합 A∪B와 공통 집합 A∩B

(예 6) $X = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$라 하고 fuzzy 집합 A, B를

$A = 0.2/x_1+0.7/x_2+1/x_3+0.1/x_4+0.5/x_5$

$B = 0.5/x_1+0.9/x_2+1/x_3+0.8/x_4+0.8/x_5$

라 하자. 이때 합집합 A∪B는 다음과 같이 된다.

$A \cup B = 0.5/x_1+0.9/x_2+1/x_3+0.8/x_4+0.8/x_5$

5. Fuzzy 집합의 공통 집합

Fuzzy 집합 A, B의 공통 집합(Intersection)은 $A \cap B$라 쓰고 다음과 같이 된다.

$$A \cap B \leftrightarrow m_{A \cup B}(x) = \min\{m_A(x) m_B(x)\} = m_A(x) \wedge m_B(x), \quad {}^{\forall}x \in X \cap \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.16)$$

Fuzzy 집합 A, B의 공통 집합 $A \cap B$의 관계를 그림으로 표시하면 〈그림 1.7〉과 같다.

[참고] Fuzzy 집합의 공통 집합은 합집합과 여집합을 사용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A \cap B = (A^C \cup B^C)^C \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.17)$$

(예 7) Fuzzy 집합 A, B를 (예 6)에 주어진 것으로 하자. 이때

$$A \cap B = 0.2/x_1 + 0.7/x_2 + 1/x_3 + 0.1/x_4 + 0.5/x_5$$

$$A^C = 0.8/x_1 + 0.3/x_2 + 1/x_3 + 0.9/x_4 + 0.5/x_5$$

$$B^C = 0.5/x_1 + 0.1/x_2 + 0/x_3 + 0.2/x_4 + 0.2/x_5$$

$$A^C \cup B^C = 0.8/x_1 + 0.3/x_2 + 0/x_3 + 0.9/x_4 + 0.5/x_5$$

그러므로

$$(A^C \cup B^C)^C = 0.2/x_1 + 0.7/x_2 + 1/x_3 + 0.1/x_4 + 0.5/x_5$$

$$\therefore A \cap B = (A^C \cup B^C)^C$$

이 예는 위의 식 (1.17)를 확인하는 것이다.

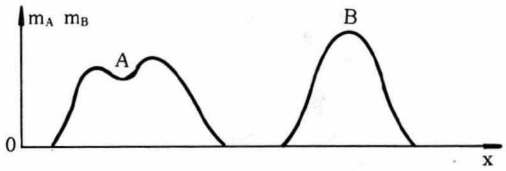
공집합 : Fuzzy 집합이 공집합(empty set)이라는 것은 ϕ라 나타내고 다음과 같이 정의된다.

$$\phi \longleftrightarrow m_\phi(x) = 1, \quad {}^{\forall}x \in X \quad \cdots\cdots (1.18)$$

전체 집합 : Fuzzy집합이 전체 집합(universal set) X의 경우 다음과 같이 정의된다.

$$X \longleftrightarrow m_X(x) = 1, \quad {}^{\forall}x \in X \quad \cdots\cdots (1.19)$$

보통의 집합의 경우와 마찬가지로 fuzzy 집합 A, B가 $A \cap B = \phi$일때 A와 B는 disjoint하다고 한다. 이것을 그림으로 표시하면 〈그림 1.8〉과 같다.



〈그림 1.8〉 Fuzzy 집합 A, B가 disjoint한 예

Ⅳ. Fuzzy 집합 연산의 기본적 성질

일반의 집합에 있어서 성립하는 여러가지의 기본 성질이 fuzzy 집합에서도 성립한다. 이 기본 성질들을 〈표 1.2〉에 나타냈다. 〈표 1.2〉의 fuzzy 집합에 있어서 성립하는 기본 성질들을 증명하기 위해서는 fuzzy 집합의 membership 함수를 고찰하면 된다.

예를 들면 드모르간(De Morgan)의 법칙 :

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $1 - \max\{m_A, m_B\} = \min\{1 - m_A, 1 - m_B\}$를 증명하면 된다. 그러기 위해서는 $m_A \geq m_B$의 경우와 $m_A \leq m_B$의 경우에 대하여 적용해 보면 쉽게 증명할 수 있다.

마찬가지로, 예를 들면 분배법칙 : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$를 증명하려면

〈표 1.1〉 분배법칙 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$의 증명

≧			$\mu_B \vee \mu_C$	$\mu_A \wedge (\mu_B \vee \mu_C)$	$\mu_A \wedge \mu_B$	$\mu_A \wedge \mu_C$	$(\mu_A \wedge \mu_B) \vee (\mu_A \wedge \mu_C)$
μ_A	μ_B	μ_C	μ_B	μ_B	μ_B	μ_C	μ_B
μ_A	μ_C	μ_B	μ_C	μ_C	μ_B	μ_C	μ_C
μ_B	μ_C	μ_A	μ_B	μ_A	μ_A	μ_A	μ_A
μ_B	μ_A	μ_C	μ_B	μ_A	μ_A	μ_C	μ_A
μ_C	μ_A	μ_B	μ_C	μ_A	μ_B	μ_A	μ_A
μ_C	μ_B	μ_A	μ_C	μ_A	μ_A	μ_A	μ_A

$\min\{m_A, \max\{m_B, m_C\}\} = \max\{\min\{m_A, m_B\}, \min\{m_A, m_C\}\}$가 성립하는 것을 보여주면 된다. 여기서 $\max\{x, y\} = x \vee y$, $\min\{x, y\} = x \wedge y$로 표시하면 위식은 $m_A \wedge (m_B \vee m_C) = (m_A \wedge m_B) \vee (m_A \wedge m_C)$라 쓸 수 있다.

이것을 증명하기 위해서는 아래의 6가지의 경우를 고려하여 증명해야 한다.

$m_A \geq m_B \geq m_C$, $m_A \geq m_C \geq m_B$, $m_B \geq m_C \geq m_A$,
$m_B \geq m_A \geq m_C$, $m_C \geq m_A \geq m_B$, $m_C \geq m_B \geq m_A$

위의 〈표 1.1〉은 이러한 경우들을 설명한 것이다.

〈표 1.2〉 Fuzzy 집합의 기본 성질

(1)	If $A \subseteq B$ and $B \subseteq C$, then $A \subseteq C$
(2)	$A \cup A = A$, $A \cap A = A$
(3)	$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
(4)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(5)	$A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$
(6)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(7)	$\overline{\overline{A}} = A$
(8)	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (De Morgans Law)
(9)	Generally $A \cup \overline{A} \neq X$, $A \cap \overline{A} \neq \phi$ (This property is not true in crisp set theory)

V. Fuzzy 집합에 대한 기타의 연산

Ⅲ장에서 설명한 fuzzy 집합의 연산에 더하여 fuzzy 집합을 고찰하는데 있어서 중요한 몇개의 연산을 살펴본다.

Exclusive sum : Fuzzy 집합 A, B의 exclusive sum은 $A \oplus B$라 쓰고 다음과 같이 정의된다.

$$A \oplus B = (A \cap B^C) \cup (A^C \cap B) \quad \cdots\cdots (1.20)$$

(예 1) Fuzzy 집합 A, B를

$$A = 0.2/x_1 + 0.7/x_2 + 1/x_3 + 0/x_4 + 0.5/x_5 \quad \cdots\cdots (1.21)$$

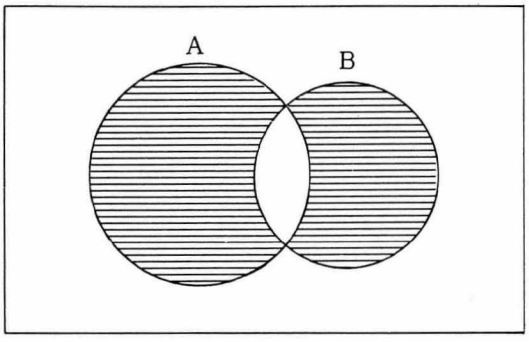
$$B = 0.5/x_1 + 0.3/x_2 + 1/x_3 + 0.1/x_4 + 0.5/x_5 \quad \cdots\cdots (1.22)$$

라 하자. 그러면

$A \oplus B = 0.5/x_1 + 0.7/x_2 + 0/x_3 + 0.1/x_4 + 0.5/x_5$

[참고] A, B가 일반의 경우 A, B의 exclusive sum $A \oplus B$는 〈그림 1.9〉와 같다. 이것은 후에 정의되는 절대차 $|A - B| = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)$

그러나 A, B가 fuzzy 집합의 경우는 일반적으로 $A \oplus B \neq |A - B|$이다.



〈그림 1.9〉 보통의 집합 A, B에 있어서 exclusive sum $A \oplus B$ 및 절대차 $|A - B|$

차집합 : Fuzzy 집합 A와 B의 차집합(difference set)는 $A - B$라 쓰고 다음과 같이 정의된다.

$$A - B = A \cap B^C \quad \cdots\cdots (1.23)$$

이것은 일반 집합의 경우와 똑같이 성립한다.

[참고] 명확히 $A - B \neq B - A$

대수적 : Fuzzy 집합 A, B의 대수적(algebraic product)는 AB라 쓰고 다음과 같이 정의된다.

$$AB \leftrightarrow m_{AB}(x) = m_A(x) \cdot m_B(x), \ {}^{\forall}x \in X$$

(예 2) A, B를 식 (1.21), (1.22)의 fuzzy 집

합이라고 하자. 대수적 AB는

$$AB=0.1/x_1+0.2/x_2+1/x_3+0/x_4+0.25/x_5$$

대수합 : Fuzzy 집합 A, B의 대수합(algebraic sum)은 $A \dot{+} B$라 쓰고 다음과 같이 정의된다.

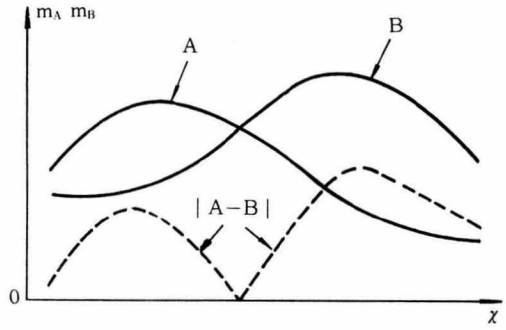
$$A \dot{+} B \leftrightarrow m_{A \dot{+} B}(x) = m_A(x) + m_B(x) - m_A(x)m_B(x) \quad {}^{\forall}x \in X \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1.24)$$

[참고] $A \dot{+} B \leftrightarrow (A^C B^C)^C$가 성립한다.

절대차 : Fuzzy 집합 A, B의 절대차(absolute differenec)는 $|A-B|$라 쓰고 다음과 같이 정의된다.

$$|A-B| \leftrightarrow m_{|A-B|}(x) = |m_A(x) - m_B(x)|, \quad {}^{\forall}x \in X \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.25)$$

이것을 그림으로 표시하면 〈그림 1.10〉과 같다. 대수적 및 대수합에 의한 기본적 성질을 정리하면 〈표 1.3〉과 같다.



〈그림 1.10〉 Fuzzy 집합 A, B의 절대차 A−B의 설명

〈표 1.3〉 대수적 및 대수합의 기본성질

(1)	$AA \subseteq A$, $A \dot{+} A \supseteq A$
(2)	$AB=BA$, $A \dot{+} B = B \dot{+} A$
(3)	$(AB)C=A(BC)$, $(A \dot{+} B) \dot{+} C = A \dot{+} (B \dot{+} C)$
(4)	$A(A \dot{+} B) \subseteq A$, $A \dot{+} (AB) \supseteq A$
(5)	$A(B \dot{+} C) \subseteq AB \dot{+} AC$, $A \dot{+} (BC) \supseteq (A \dot{+} B)(A \dot{+} C)$
(6)	$\overline{AB} = \overline{A} \dot{+} \overline{B}$, $\overline{A \dot{+} B} = \overline{A}\ \overline{B}$
(7)	$A\phi = \phi$, $AX = A$, $A \dot{+} \phi$, $A \dot{+} X = X$
(8)	$AA \supseteq \phi$, $A \dot{+} A \subseteq X$
(9)	$AB \subseteq A \cap B$, $A \dot{+} B \supseteq A \cup B$
(10)	$A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$, $A(B \cap C) = (AB) \cap (AC)$
(11)	$A \dot{+} (B \cup C) = (A \dot{+} B) \cup (A \dot{+} C)$
	$A \dot{+} (B \cap C) = (A \dot{+} B) \cap (A \dot{+} C)$
(12)	$A \cup (BC) \supseteq (A \cup B)(A \cup C)$
	$A(B \cap C) \supseteq (A \cap B)(A \cap C)$
(13)	$A \cup (B \dot{+} C) \subseteq (A \cup B) \dot{+} (A \cup C)$
	$A \cap (B \dot{+} C) \subseteq (A \cap B) \dot{+} (A \cap C)$

Ⅵ. Fuzzy 집합의 level 집합

본 장에서는 fuzzy 집합의 본질을 취급하는데 있어서 중요한 수법으로 간주되는 level 집합에 대해서 설명한다.

Level 집합 : A를 X의 fuzzy 집합이고 $\alpha \in [0, 1]$일때 A의 α−level set(또는 α−cut)는 $A\alpha$라 표시하고 다음과 같이 정의되는 X의 crisp 집합이다.

$$A\alpha = \{x : m_A(x) \geq \alpha\} \quad x \in X, \alpha \in [0, 1] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.26)$$

(예 1) Fuzzy 집합 A를 $A=0.1/a+0.3/b+0.5/c+0.9/d+0.4/e+1/f$라 하자. α가 각각 0.1, 0.3, 0.4, 0.5, 0.9, 1일때 α−level 집합은 다음과 같다.

$$A_{0.1} = a+b+c+d+e+f$$
$$A_{0.3} = b+c+d+e+f$$
$$A_{0.4} = c+d+e+f$$
$$A_{0.5} = c+d+f$$
$$A_{0.9} = d+f$$
$$A_1 = f$$

이상의 level 집합에서는 fuzzy 집합 A를 특징짓고 있는 grade를 α로서 선택했지만 그 이외의 α에 대해서도 마찬가지로 구해진다. 예를 들면 $\alpha = 0$, $\alpha = 0.35$에 대해서

$$A_0 = a+b+c+d+e+f$$
$$A_{0.35} = c+d+e+f$$

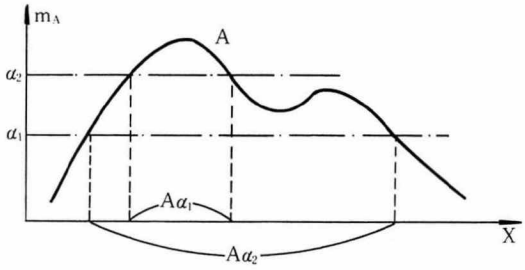
이 되고, $A_0 = A_{0.1}$, $A_{0.35} = A_{0.4}$가 된다. 따라서

fuzzy 집합 A의 level 집합을 모두 구하기 위해서는 A의 grade를 level α로서 쓰면 되는 것을 알 수 있다.

위의 예로부터 알 수 있듯이 다음의 중요한 성질이 유도된다. 즉

$$\alpha_1 \le \alpha_2 \longrightarrow A\alpha_1 \supseteq A\alpha_2$$

이 관계를 그림으로 그려보면 〈그림 1.11〉과 같다.



〈그림 1.11〉 Level 집합 $A\alpha_1$, $A\alpha_2$

이번에는 역으로 level 집합으로부터 fuzzy 집합을 구성하는 것을 생각해보자.

이것을 분해정리(resolution identity)라 부른다. 즉 fuzzy 집합 A는 level 집합을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A = \bigcup_{\alpha} \alpha A_\alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.27)$$

여기서 αA_α는 스칼라(scalar) α와 lebel 집합 A_α 의 대수적을 나타낸다. 즉, αA_α의 membership 함수는

$$m_{\alpha A_\alpha}(x) = \alpha\, m_{A_\alpha}(x),\ {}^{\forall}x \in X \quad \cdots (1.28)$$

로 된다.

(예 2) 앞의 (예 1)에서 기술한 fuzzy 집합을 생각해 보자. 식 (1.27)의 분해정리 및 (1.28)을 사용하면 fuzzy 집합 A는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} A = {} & 0.1(1/a+1/b+1/c+1/d+1/e+1/f+) \\ & \cup\ 0.3(1/b+1/c+1/d+1/e+1/f) \\ & \cup\ 0.4(1/c+1/d+1/e+1/f) \\ & \cup\ 0.5(1/c+1/d+1/f) \\ & \cup\ 0.9(1/d+1/f) \\ & \cup\ 1(1/f) \\ = {} & 0.1/a+0.1/b+0.1/c+0.1/d+0.1/e+0.1/f \\ & +0.3/b+0.3/c+0.3/d+0.3/e+0.3/f \\ & +0.4/c+0.4/d+0.4/e+0.4/f \\ & +0.5/c+0.5/d+0.5/f \\ & +0.9/d+0.9/f \\ & +1/f \end{aligned}$$

한편, 일반적으로 $a/x+b/x=(a\vee b)/x$인 것에 주의하여, 예를 들면

$B = 0.3/x_1+0.5/x_1+0.2/x_1+0.9/x_2$이면

$B = (0.3\vee 0.5\vee 0.2)/x_1+0.9/x_2$

$=0.5/x_1+0.9/x_2$로 나타낼 수 있다.

이러한 것을 사용하면 A는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} A = {} & 0.1/a \\ & +(0.1\vee 0.3)/b \\ & +(0.1\vee 0.3\vee 0.4\vee 0.5)/c \\ & +(0.1\vee 0.3\vee 0.4\vee 0.5\vee 0.9)/d \\ & +(0.1\vee 0.3\vee 0.4)/e \\ & +(0.1\vee 0.3\vee 0.4\vee 0.5\vee 0.9\vee 1)/f \\ = {} & 0.1/a+0.3/b+0.5/c+0.9/d+0.4/e+1/f \end{aligned}$$

위와 같이 되어 주어진 fuzzy 집합과 일치하고 있는 것을 알 수 있다. 이 level 집합의 개념을 사용함으로써 예를 들면 fuzzy 집합의 합집합(union)을 간접적으로 정의할 수 있다. 즉 X의 fuzzy 집합을 A, B라 하고 각각의 level 집합을 $A\alpha$, $B\alpha$(단, $0 \le \alpha \le 1$)라 한다. 집합 $A\alpha$와 $B\alpha$의 합(union)을 $(A\cup B)\alpha = A\alpha \cup B\alpha$로 나타내면 분해 정리로 부터 fuzzy 집합 A와 B의 합집합 $A\cup B$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A\cup B = \bigcup_{\alpha} \alpha (A\cup B)_\alpha = \bigcup_{\alpha} \alpha (A_\alpha \cup B_\alpha) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1.29)$$

(예 3) $X = x_1+x_2+x_3$로 하고 X의 fuzzy집합 A, B를 각각

$A = 0.3/x_1 + 0.5/x_2 + 0.9/x_3$

$B = 0.8/x_1 + 0.5/x_2 + 0.7/x_3$ 로 하면

각각의 level 집합은 아래와 같다.

$A_{0.3} = x_1 + x_2 + x_3$

$A_{0.5} = x_2 + x_3$

$A_{0.7} = A_{0.8} = A_{0.9} = x_3$

한편

$B_{0.3} = B_{0.5} = x_1 + x_2 + x_3$

$B_{0.7} = x_1 + x_2$

$B_{0.8} = x_1$

$B_{0.9} = \phi$

따라서 각 level 집합의 합집합은 아래와 같다.

$A_{0.3} \cup B_{0.3} = x_1 + x_2 + x_3$

$A_{0.5} \cup B_{0.5} = x_1 + x_2 + x_3$

$A_{0.7} \cup B_{0.7} = x_1 + x_3$

$A_{0.8} \cup B_{0.8} = x_1 + x_3$

$A_{0.9} \cup B_{0.9} = x_3$

식 (1.29)로부터 $A \cup B$는 다음과 같이 된다.

$$
\begin{aligned}
A \cup B = {} & 0.3/x_1 + 0.3/x_2 + 0.3/x_3 \\
& + 0.5/x_1 + 0.5/x_2 + 0.5/x_3 \\
& + 0.7/x_1 \qquad\qquad + 0.7/x_3 \\
& + 0.8/x_1 \qquad\qquad + 0.8/x_3 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + 0.9/x_3 \\
= {} & 0.8/x_1 + 0.5/x_2 + 0.9/x_3
\end{aligned}
$$

$A \cup B$를 직접 구하면 $A \cup B = (0.3 \vee 0.8)/x_1 + (0.5 \vee 0.5)/x_2 + (0.9 \vee 0.7)/x_3 = 0.8/x_1 + 0.5/x_2 + 0.9/x_3$ 이 되어 일치하는 것을 알 수 있다.

참 고 문 헌

1. Y. Ashai et al., Fuzzy System 이론 입문, (in Japanese), Ohmoo－Sa. 1989.
2. N. Honda et al., Fuzzy 공학 입문, (in Japanese), 해문당. 1989.
3. A. Kandel, *Fuzzy mathematical techniques with applications*, Addlson－Wesley. 1986.
4. M. Mizmoto, Fuzzy 이론과 그 응용, Science －Sa. 1990.
5. V. Novak, *Fuzzy sets and their applications*, Adam Hilger. 1986.
6. M. Sakawa et al., Fuzzy 이론의 기초와 응용 (in Japanese), Morigita Publishing Co. 1989.